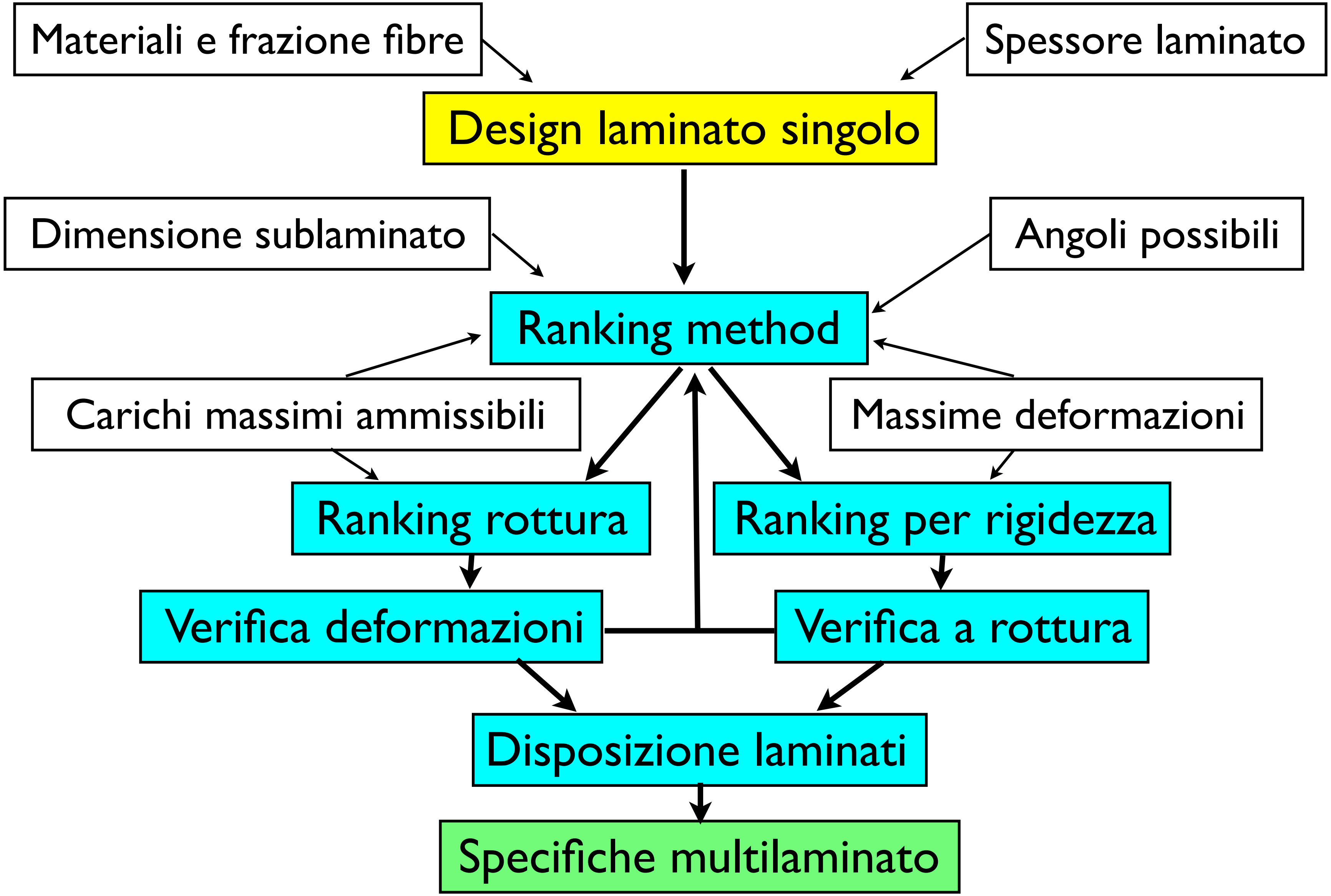
Compositi: teoria dei laminati

Introduzione

Il laminato singolo

Equazioni costitutive e proprietà
Criteri di rottura
Fibre fuori asse

Introduzione: progettazione



Introduzione: design multilaminato

- Design laminato:
  - Materiali e proprietà (lezioni precedenti)
  - Equazioni costitutive (progettazione a rigidezza)
  - Criteri di rottura (progettazione a rottura)
  - Laminato con fibre fuori asse
- Multilaminato
  - Equazioni costitutive multilaminato
  - Criteri di rottura
  - Il sublaminato
  - The ranking method
  - Disposizione laminati e regole per un buon design

Il laminato singolo: ipotesi di base

- Lavoriamo in regime lineare elastico:
  - frazione fibre elevata => rottura quando abbiamo rottura delle fibre
- Sforzo piano: si considera il laminato sottile per cui lo sforzo nella direzione perpendicolare al laminato è trascurabile e il laminato è libero di deformarsi nella direzione perpendicolare
- Laminato a fibre unidirezionali:
  - le proprietà di base possono essere calcolate o misurate sperimentalmente
- Regime di piccole deformazioni.

Equazioni costitutive laminato

- Sforzo piano: $\sigma_z = 0$

$$\boxed{\underline{\sigma} = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\varepsilon}}$$

- dove:

$$\underline{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_s \end{Bmatrix} \qquad \underline{\underline{Q}} = \begin{bmatrix} \dfrac{E_x}{1-\nu_x\nu_y} & \nu_x Q_{yy} & 0 \\ \nu_y Q_{xx} & \dfrac{E_y}{1-\nu_x\nu_y} & 0 \\ 0 & 0 & E_s \end{bmatrix} \qquad \nu_y = \nu_x \frac{E_y}{E_x} \qquad \underline{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix}$$

- e in maniera esplicita:

$$\underline{\underline{Q}} = \begin{bmatrix} \dfrac{E_x}{1-\nu_x\nu_y} & \dfrac{\nu_y E_x}{1-\nu_x\nu_y} & 0 \\ \dfrac{\nu_x E_y}{1-\nu_x\nu_y} & \dfrac{E_y}{1-\nu_x\nu_y} & 0 \\ 0 & 0 & E_s \end{bmatrix}$$

Equazioni costitutive laminato

- Nel caso isotropo otteniamo:

$$\underline{\underline{Q}} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix}$$

- esplicitando otteniamo le equazioni per sforzo piano:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right)$$

$$\sigma_s = \tau = G\gamma = \frac{E}{2(1+\nu)}\varepsilon_s$$

Proprietà per alcuni laminati

Type	*CFRP*	*BFRP*	*CFRP*	*GFRP*	*KFRP*	*CFRTP*	*CFRP*	*CFRP*	*CCRP*	*CCRP*
Fibre/cloth	T300	B(4)	AS	E-glass	Kev 49	AS 4	IM6	T300	T300	T300
Matrix	N5208	N5505	H3501	epoxy	epoxy	PEEK	epoxy	Fbrt 934	Fbrt934	Fbrt 934
								4-mil tp	3-mil cl	7-mil cl
Ply eng'g constants and data										
E_x, GPa	181.0	204.0	138.0	38.6	76.0	134.0	203.0	148.0	74.0	66.0
E_y, GPa	10.30	18.50	8.96	8.27	5.50	8.90	11.20	9.65	74.00	66.00
ν_x	0.28	0.23	0.30	0.26	0.34	0.28	0.32	0.30	0.05	0.04
E_s, GPa	7.17	5.59	7.10	4.14	2.30	5.10	8.40	4.55	4.55	4.10
v_f	0.70	0.50	0.66	0.45	0.60	0.66	0.66	0.60	0.60	0.60
ρ	1.60	2.00	1.60	1.80	1.46	1.60	1.60	1.50	1.50	1.50
h_o, mm	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.100	0.325	0.175
$[Q]$, *GPa*										
Q_{xx}	181.8	205.0	138.8	39.2	76.6	134.7	204.2	148.9	74.2	66.1
Q_{yy}	10.35	18.59	9.01	8.39	5.55	8.95	11.26	9.71	74.19	66.13
Q_{xy}	2.90	4.28	2.70	2.18	1.89	4.51	3.60	2.91	3.71	2.91
Q_{ss}	7.17	5.59	7.10	4.14	2.30	5.10	8.40	4.55	4.55	4.10

Resistenze e deformazioni a rottura

Type	*CFRP*	*BFRP*	*CFRP*	*GFRP*	*KFRP*	*CFRTP*	*CFRP*	*CFRP*	*CCRP*	*CCRP*
Fibre	T300	B(4)	AS	E-glass	Kev 49	As 4	H-IM6	T300	T300	T300
Matrix	N5208	N5505	3501	epoxy	epoxy	PEEK	epoxy	F934 4-mil	F934 13-mil	F934 7-mil
Max stress, MPa										
X	1500	1260	1447	1062	1400	2130	3500	1314	499	375
X′	1500	2500	1447	610	235	1100	1540	1220	352	279
Y	40	61	51.7	31	12	80	56	43	458	368
Y′	246	202	206	118	53	200	150	168	352	278
S	68	67	93	72	34	160	98	48	46	46
Max strain, eps*, E-03										
x	8.29	6.18	10.49	27.51	18.42	15.90	17.24	8.88	6.74	5.68
x′	8.29	12.25	10.49	15.80	3.09	8.21	7.59	8.24	4.76	4.23
y	3.88	3.30	5.77	3.75	2.18	8.99	5.00	4.46	6.19	5.58
y′	23.88	10.92	22.99	14.27	9.64	22.47	13.39	17.41	4.76	4.21
s	9.48	11.99	13.10	17.39	14.78	31.37	11.67	10.55	10.11	11.22

X = Resistenza longitudinale a trazione
X'= Resistenza longitudinale a compressione
Y = Resistenza trasversale a trazione
Y'= Resistenza trasversale a compressione
S = Resistenza a taglio longitudinale

Criterio di rottura lineare

- Per un laminato ortotropico soggetto a sforzi o deformazioni combinati il criterio di rottura 2-dimensionale lineare si scrive come:

$$\underline{\sigma}_{\max} = R\underline{\sigma}_{appl} \qquad \underline{\varepsilon}_{\max} = R\underline{\varepsilon}_{appl}$$

- R viene definito come il rapporto tra lo sforzo (o deformazione) a rottura e quello applicato (applicata). Di conseguenza abbiamo:
  - se R=1, si ha rottura
  - se R>1, ad esempio R=2, il fattore di sicurezza è 2, cioè possiamo avere un incremento dello sforzo quasi doppio senza rottura.
  - se R<1 lo sforzo eccede quello a rottura e indica che il laminato è sottodimensionato di 1/R

Criterio di rottura quadratico

- Il criterio lineare non funziona bene nel caso di carichi biassiali.

$$F_{ij}\sigma_i\sigma_j + F_i\sigma_i \le 1, \qquad\qquad i,j = x,y,s$$

- dove:

$$F_{xx} = \frac{1}{XX'}, \quad F_{yy} = \frac{1}{YY'}, \quad F_{ss} = \frac{1}{S^2}$$

$$F_x = \frac{1}{X} - \frac{1}{X'}, \quad F_y = \frac{1}{Y} - \frac{1}{Y'}, \quad F_s = 0$$

$$F_{xy} = F_{xy}^*\sqrt{F_{xx}F_{yy}}, \qquad\qquad -1 < F_{xy}^* < 1$$

F_{xy}^* è il termine normalizzato di interazione e deve essere determinato sperimentalmente tramite un test biassiale. Altrimenti va preso con buona approssimazione come -0.5.

Caso isotropo

- Nel caso isotropo si può dimostrare che il criterio equivale a Von Mises. In tal caso abbiamo:

$$X = X' = Y = Y'$$

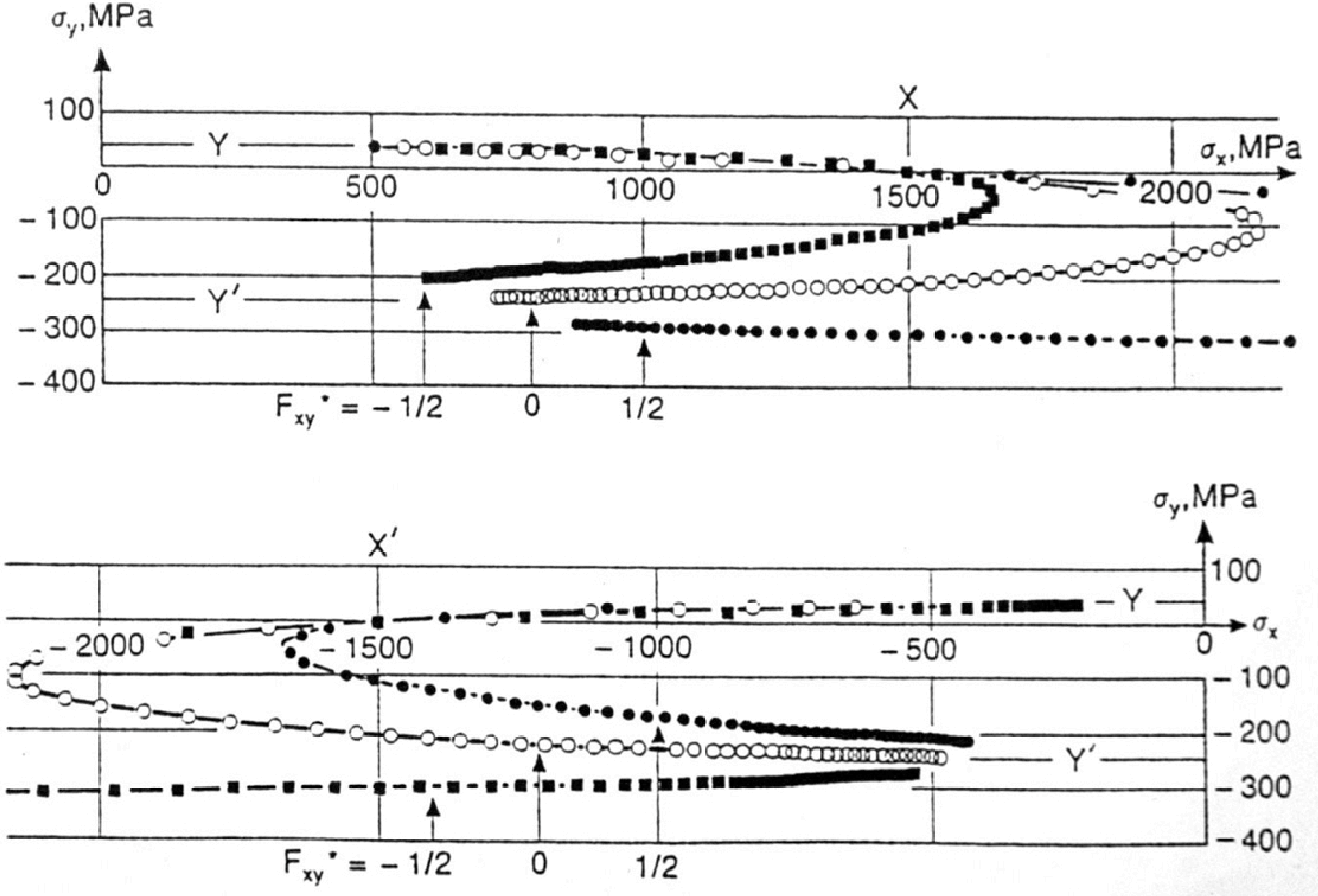
$$S = \frac{X}{\sqrt{3}}$$

- inoltre poniamo: $F_{xy}^{*} = -0.5$
- otteniamo allora:

$$\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 3\sigma_s^2 \leq X^2$$

- che corrisponde a Von Mises nel caso generale (con x e y assi principali di sforzo, il taglio diventa 0).

Elissoidi di rottura nello spazio degli sforzi



Criterio di rottura quadratico per gli sforzi

- Si ha rottura per combinazione di sforzi che escono dagli elissoidi, utilizzando il rapporto R come per il criterio lineare possiamo scrivere:

$$F_{ij}\sigma_i\sigma_j R^2 + F_i\sigma_i R - 1 = 0, \qquad R \geq 1$$

- Risolviamo l'equazione in R:

$$aR^2 + bR - 1 = 0 \qquad a = F_{ij}\sigma_i\sigma_j, \quad b = F_i\sigma_i$$

- solo la soluzione positiva è quella corretta:

$$R = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{1}{a}}$$

Criterio quadratico nello spazio delle deformazioni

- Analogamente agli sforzi:

$$G_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j + G_i\varepsilon_i \le 1, \qquad i,j = x,y,s$$

- dove:

$$G_{xx} = F_{xx}Q_{xx}^2 + 2F_{xy}Q_{xx}Q_{xy} + F_{yy}Q_{xy}^2$$

$$G_{yy} = F_{xy}Q_{xy}^2 + 2F_{xy}Q_{yy}Q_{xy} + F_{yy}Q_{yy}^2$$

$$G_{xy} = F_{xx}Q_{xx}Q_{xy} + F_{xy}\left(Q_{xx}Q_{yy} + Q_{xy}^2\right) + F_{yy}Q_{yy}Q_{xy}$$

$$G_{ss} = 4F_{ss}Q_{ss}^2$$

$$G_x = F_xQ_{xx} + F_yQ_{xy}$$

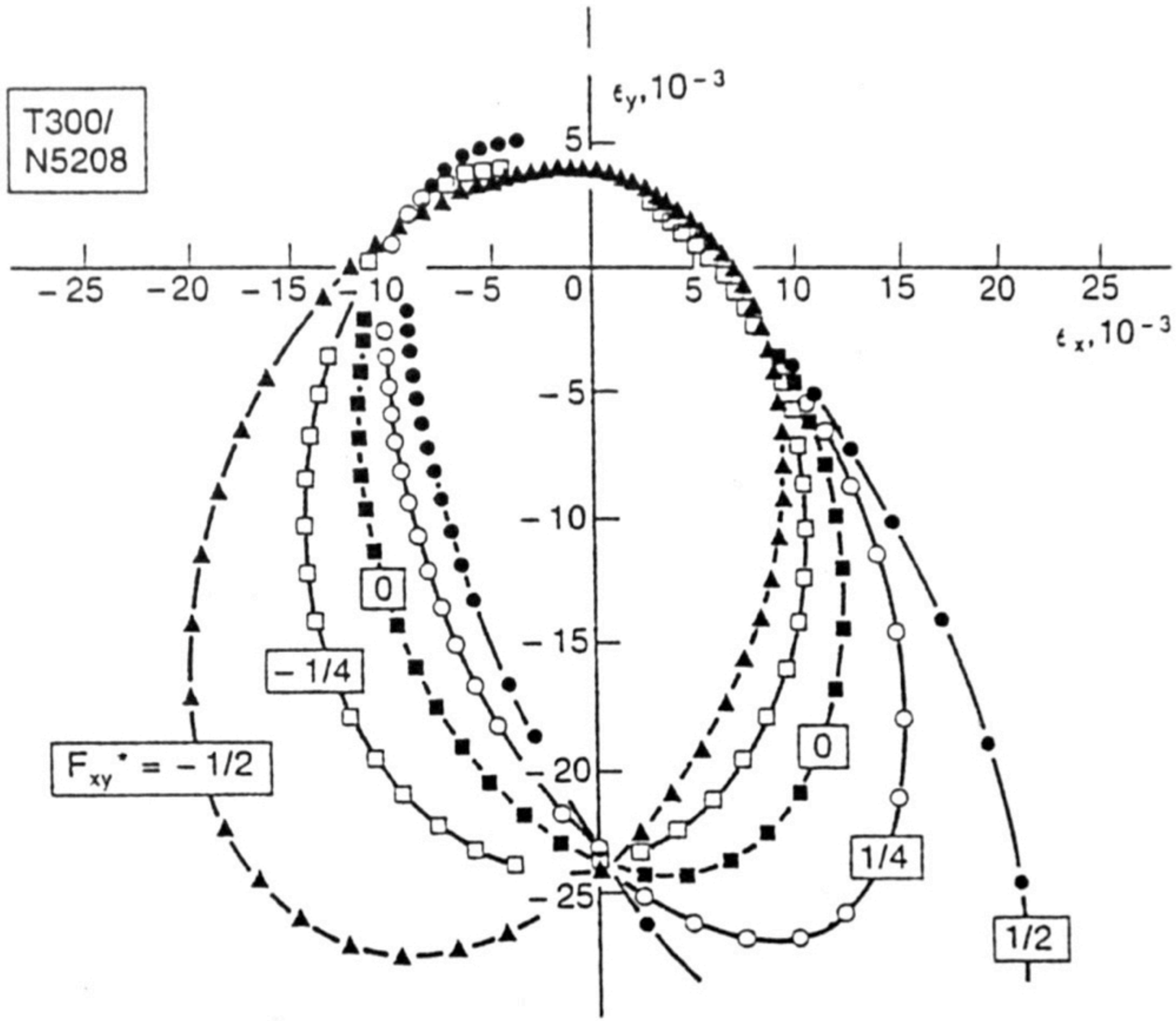
$$G_y = F_xQ_{xy} + F_yQ_{yy}$$

- risolvendo l'equazione in R:

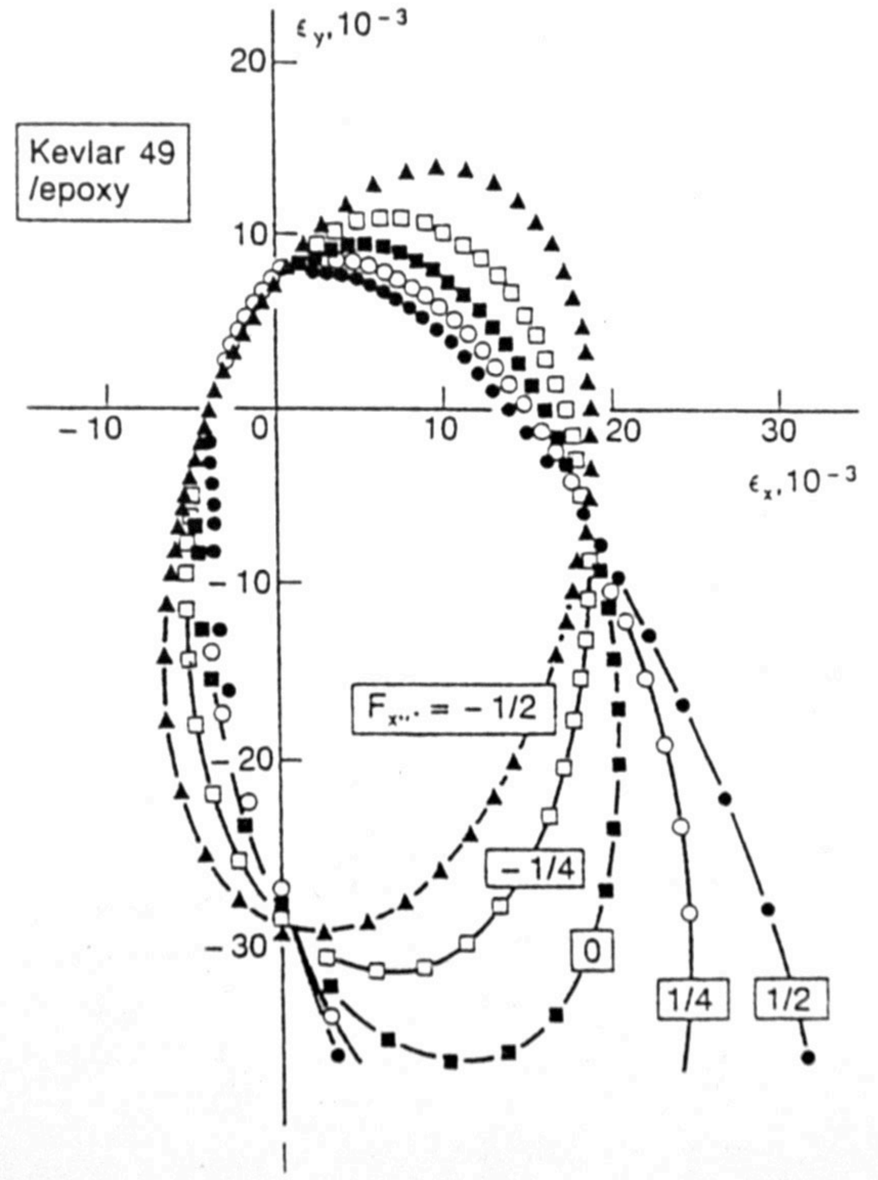
$$G_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j R^2 + G_i\varepsilon_i R - 1 = 0, \qquad R \ge 1$$

$$aR^2 + bR - 1 = 0 \qquad a = G_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j, \quad b = G_i\varepsilon_i \qquad R = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{1}{a}}$$

Elissoidi di rottura nello spazio delle deformazioni



Caso con fibre di Kevlar



Laminato con fibre fuori asse

- Le proprietà, equazioni costitutive etc. si ottengono tramite trasformazione d'assi rispetto alle equazioni già viste.
- Per un laminato con fibre ruotate di un angolo θ basta analizzare il laminato uniassiale ruotato di un angolo θ.
- La trasformazione d'assi si ottiene dalle relazioni geometriche usuali:

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{Q}}\,\underline{\varepsilon}$$

$$\underline{\sigma}' = \underline{\underline{T}}\,\underline{\sigma} = \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{Q}}\,\underline{\varepsilon}$$

$$\underline{\sigma}' = \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{T}}^T\,\underline{\varepsilon}'$$

$$\underline{\sigma}' = \underline{\underline{Q}}'\,\underline{\varepsilon}'$$

$$\underline{\underline{Q}}' = \underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{T}}^T$$

Le matrici di trasformazione

- La matrice T si scrive in termini dell'angolo di rotazione θ

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} m &= \cos\theta \\ n &= \sin\theta \end{aligned}$$

- e la matrice Q' in funzione di Q diventa:

	Q_{xx}	Q_{yy}	Q_{xy}	Q_{ss}
Q'_{xx}	m^4	n^4	$2m^2n^2$	$4m^2n^2$
Q'_{yy}	n^4	m^4	$2m^2n^2$	$4m^2n^2$
$Q'_{xy}=Q'_{yx}$	m^2n^2	m^2n^2	m^4+n^4	$-4m^2n^2$
Q'_{ss}	m^2n^2	m^2n^2	$-2m^2n^2$	$(m^2-n^2)^2$
$Q'_{sx}=Q'_{xs}$	m^3n	$-mn^3$	mn^3-m^3n	$2(mn^3-m^3n)$
$Q'_{sy}=Q'_{ys}$	mn^3	$-m^3n$	m^3n-	$2(m^3n-mn^3)$